НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ – 2019
Математика
Вариант № 00

Задача 1. **(10 баллов)**

Дано

$a=\dfrac{1-x\sqrt[3]{x}}{1-x^{2/3}}$, $b=2\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Найти $\dfrac{b+1}{a}$.

Решение

Упростим выражения

$$a=\frac{1-x\sqrt[3]{x}}{1-x^{2/3}}=\frac{1-x\cdot x^{1/3}}{1-x^{2/3}}=\frac{1-x^{4/3}}{1-x^{2/3}}=\frac{1-\left(x^{2/3}\right)^2}{1-x^{2/3}}=\frac{(1-x^{2/3})(1+x^{2/3})}{1-x^{2/3}}=1+x^{2/3};$$

$$b=2\sqrt[3]{x^2}-\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{2\sqrt[3]{x^2}+2x-x-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}\,(x^{1/3}+1)}{x^{1/3}+1}=\sqrt[3]{x^2}.$$

Подставим полученные выражения в $\dfrac{b+1}{a}$**:**

$$\frac{b+1}{a}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{1+x^{2/3}}=1.$$

Ответ: $\dfrac{b+1}{a}=1$

Задача 2. **(15 баллов)**

Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости условием

$|x+2|+|y-2|\le 2$.

Решение:

При $y<2$ **неравенство** $|x+2|+|y-2|\le 2$ **примет вид:**

$|x+2|+|y-2|\le 2 \Rightarrow |x+2|-y+2\le 2 \Rightarrow y\ge |x+2|$.

При $y\ge 2$ **неравенство** $|x+2|+|y-2|\le 2$ **примет вид:**

$|x+2|+|y-2|\le 2 \Rightarrow |x+2|+y-2\le 2 \Rightarrow y\le 4-|x+2|$.

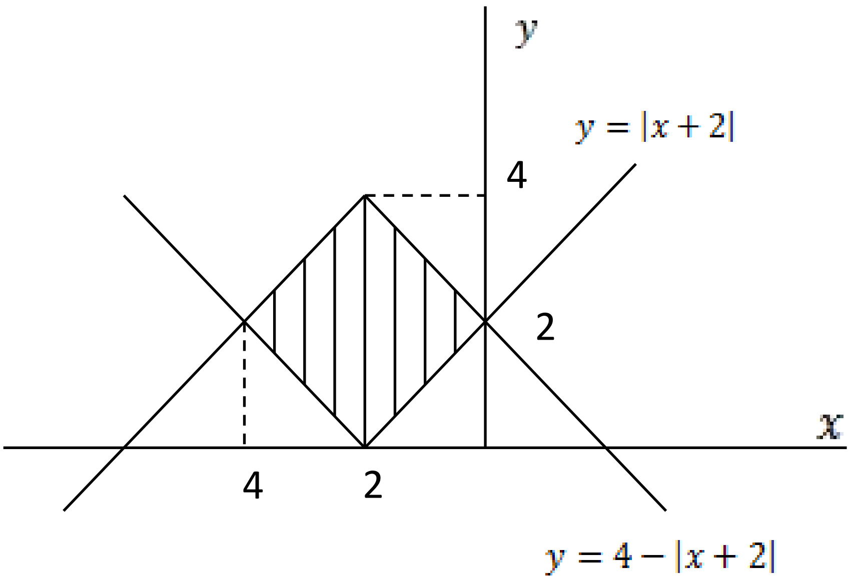
Таким образом, фигура, площадь которой необходимо найти, ограничена прямыми

$y = x + 2$,

$y = -x - 2$,

$y = 2 - x$,

$y = 6 + x$.



Полученная фигура является квадратом (доказать), сторона которого равна $a = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

Следовательно, площадь фигуры равна

$S = (\sqrt{8})^2 = 8$.

Ответ: $S = 8$

Задача 3. **(15 баллов)**

Решить уравнение $\sin(6\pi \sin x) + \sqrt{3}\cos(6\pi \sin x) = 2$.

Решение

Разделим обе части уравнения на два:

$$\frac{1}{2}\sin(6\pi \sin x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(6\pi \sin x) = 1.$$

Учитывая, что $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **, запишем уравнение в виде**

$$\sin(6\pi\sin x)\cos\frac{\pi}{3}+\cos(6\pi\sin x)\sin\frac{\pi}{3}=1.$$

Левую часть последнего уравнения преобразуем, используя формулу $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ **:**

$$\sin\left(6\pi\sin x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Откуда получаем

$$\sin\left(6\pi\sin x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Rightarrow 6\pi\sin x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi n \Rightarrow 6\pi\sin x=\frac{\pi}{6}+2\pi n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\sin x=\frac{1}{6}+2n \Rightarrow \sin x=\frac{1}{36}+\frac{n}{3}, n\in\mathbb{Z}$$

Учитывая, что $|\sin x|\le 1$**, найдём возможные значения** n**:**

$$\left|\frac{1}{36}+\frac{n}{3}\right|\le 1 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{36}+\frac{n}{3}\le 1,\\ \frac{1}{36}+\frac{n}{3}\ge -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{n}{3}\le\frac{35}{36},\\ \frac{n}{3}\ge -\frac{37}{36}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n\le\frac{35}{12},\\ n\ge -\frac{37}{12}\end{cases}.$$

Учитывая, что $n\in\mathbb{Z}$ **, получаем**

$$n=\{-2;-1;0;1;2;-3\}.$$

Решим уравнение $\sin x=\frac{1}{36}+\frac{n}{3}$**, где** $n=\{-2;-1;0;1;2;-3\}$ **.**

$$x=(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{36}+\frac{n}{3}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{36}+\frac{n}{3}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$ **;** $n=\{-2;-1;0;1;2;-3\}$ **.**

***Задача 4.* (10 баллов)**

Решить неравенство $\sqrt{x^2+2x-8}<x-1$ **.**

Решение

Неравенство $\sqrt{f(x)}<g(x)$ **равносильно системе неравенств**

$$\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)\ge 0,\\ f(x)<g(x)\end{cases}.$$

В нашем случае эта система примет вид

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x^2+2x-8\ge 0, \\ x^2+2x-8<(x-1)^2 \end{cases}.$$

Решим каждое неравенство отдельно:

$x-1>0 \Rightarrow x>1$;

$x^2+2x-8\ge 0 \Rightarrow (x+4)(x-2)\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$;

$x^2+2x-8<(x-1)^2 \Rightarrow x^2+2x-8<x^2-2x+1 \Rightarrow 4x<9 \Rightarrow x<\dfrac{9}{4}$.

Найдём пересечение полученных интервалов:

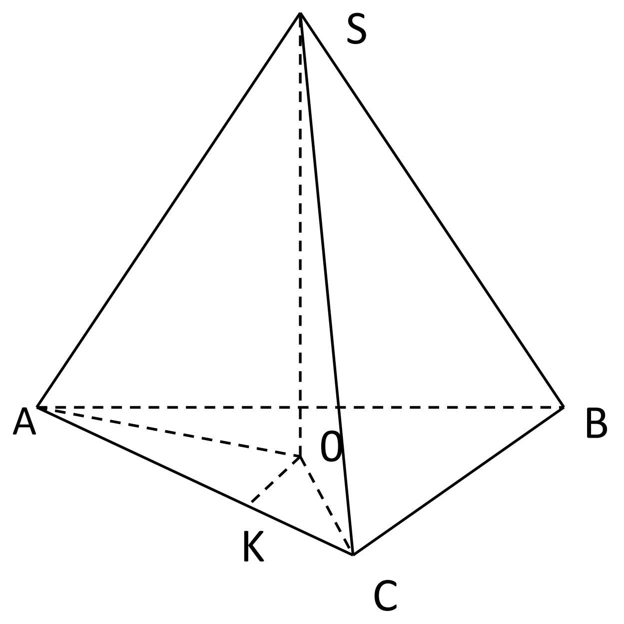
$x\in[2;2,25)$.

Ответ: $x\in[2;2,25)$.

Задача 5. **(15 баллов)**

Основание пирамиды - правильный треугольник со стороной a. Угол между одной из боковых граней и плоскостью основания равен α , а угол между каждым из боковых рёбер, лежащих в этой грани и плоскостью, равен β. Найти высоту пирамиды.

Решение.



Введём обозначения:

$SO = H -$ **высота пирамиды;**

$AB = BC = AC = a$ **(по условию);**

$\angle SAO = \angle SCO = \beta$ **(по условию);**

$\angle SKO = \alpha$ **(по условию);**

$AO = b$ **.**

$\triangle AOS = \triangle COS$ **(это прямоугольные треугольники, сторона** SO **- общая,** $\angle SAO = \angle SCO$ **).**

Следовательно, $AO = OC$ **и треугольник** AOC **- равнобедренный.**

Значит $AK = KC = \dfrac{a}{2}$ **.**

Из треугольника AOS $tg\beta = \dfrac{H}{b} \Rightarrow H = b \cdot tg\beta$ **.**

Из треугольника KOS $tg\alpha = \dfrac{H}{KO} = \dfrac{H}{\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}} \Rightarrow H = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}} \cdot tg\alpha$ **.**

Приравняем выражения для H **и выразим** b **:**

$$b \cdot tg\beta = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \cdot tg\alpha \Rightarrow b^2 tg^2\beta = tg^2\alpha\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow b = \frac{a}{2} \cdot \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha - tg^2\beta}}.$$

Таким образом, $H = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha - tg^2\beta}} \cdot tg\beta = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{tg\alpha tg\beta}{\sqrt{tg^2\alpha - tg^2\beta}} = \dfrac{a}{2\sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}}$ **.**

Ответ: $H = \dfrac{a}{2\sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}}$ **.**

Задача 6. **(15 баллов)**

Решите неравенство $\log_x\left(\log_9(81^x - 6)\right) \geq 1$ **.**

Решение

Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} \log_9(81^x - 6) > 0, \\ 81^x - 6 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_9(81^x - 6) > \log_9 1, \\ 81^x > 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81^x - 6 > 1, \\ x > \log_{81} 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 81^x > 7, \\ x > \log_{81} 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \log_{81} 7, \\ x > \log_{81} 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \log_{81} 7, \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Для решения неравенства воспользуемся методом рационализации:

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} \varphi(x) \Rightarrow (f(x)-1)(\mathrm{g}(x)-\varphi(x)) > 0.$$

В нашем случае получаем:

$$\log_x \left(\log_9 (81^x - 6)\right) \geq 1 \Rightarrow \log_x \left(\log_9 (81^x - 6)\right) \geq \log_x x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)(\log_9 (81^x - 6) - \mathrm{x}) \geq 0 \Rightarrow (x-1)(\log_9 (81^x - 6) - \log_9 9^x) \geq 0.$$

Для решения последнего неравенства воспользуемся обобщённым методом интервалов:

$$(x-1)(\log_9 (81^x - 6) - \log_9 9^x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 81^x - 6 = 9^x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0,5 \end{array}\right..$$

С учётом ОДЗ получим следующие интервалы:

$(\log_{81} 7; 0,5]$, $[0,5;1)$, $(1;+\infty)$.

Определим знак выражения $(x-1)(\log_9 (81^x - 6) - \log_9 9^x)$ **в каждом из этих интервалов:**

$x = 2 : (2-1)(\log_9 (81^2 - 6) - \log_9 9^2) > 0$;

$x = 0,6 : (0,6-1)(\log_9 (81^{0,6} - 6) - \log_9 9^{0,6}) < 0$;

$x = 0,4 : (0,4-1)(\log_9 (81^{0,4} - 6) - \log_9 9^{0,4}) < 0$.

Окончательно получаем $x \in \left(\log_{81} 7; \frac{1}{2}\right] \cup (1;+\infty)$.

Ответ: $x \in \left(\log_{81} 7; \frac{1}{2}\right] \cup (1;+\infty)$.

Задача 7. **(20 баллов)**

При каких значениях параметра *m* корни квадратного уравнения $(m-2)x^2 + 8x + m + 4 = 0$ **действительны и оба отрицательны?**

Решение

Квадратное уравнение имеет действительные корни, когда его дискриминант больше или равен нулю.

Решим неравенство $D \geq 0$:

$64 - 4(m+4)(m-2) \geq 0 \Rightarrow -m^2 - 2m + 24 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$ **.**

Так как по условию оба корня x_1 **и** x_2 **уравнения отрицательны, то** $x_1 \cdot x_2 > 0$ **и** $x_1 + x_2 < 0$ **.**

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m+4}{m-2}$ **и** $x_1 + x_2 = -\dfrac{8}{m-2}$ **.**

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{m+4}{m-2} > 0, \\ -\dfrac{8}{m-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow m > 2 \text{ .}$$

Учитывая, что $m \in (-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$ **окончательно получаем** $m \in (2; 4]$ **.**

Ответ: $m \in (2; 4]$ **.**